Université du Québec à Montréal
ECO 5620 — Max Blouin

Enchères

1 Introduction

Une enchère est une procédure par laquelle on vend un bien au plus offrant. Il y a plusieurs types d'enchères, qui se distinguent par la manière dont les offres sont soumises et par le prix que le gagnant de l'enchère est tenu de payer.

enchères vs. prix affiché

Pourquoi certains biens sont-ils vendus par prix affiché (*posted price*) et d'autres par enchères (*auctions*)? En général, lorsqu'un vendeur a un grand nombre d'unités du bien à vendre, la vente par enchère est une procédure trop coûteuse à implementer. Il lui faudrait faire une enchère pour chaque unité (ou au moins pour plusieurs "blocs" d'unités). Il préfère déclarer lui-même le prix qu'il désire obtenir, et laisser les acheteurs potentiels décider s'ils sont prêts ou non à payer ce prix.

Lorsqu'un vendeur a plusieurs concurrents, le marché tend à égaliser le prix auquel toutes les unités du bien seront vendues. L'enchère est un peu superflue dans ce cas, puisque le vendeur sait d'avance quel prix il pourra obtenir.

L'enchère est utilisée lorsque le vendeur a une seule unité du bien (ou un petit nombre d'unités) à vendre et qu'il a peu de concurrents. Le bien a donc des caractéristiques qui en font un bien unique. Le marché de l'immobilier est un bon exemple: bien qu'il y a toujours plusieurs propriétés à vendre, chacune d'elles est unique, par son emplacement, son architecture, etc. Ce marché fonctionne effectivement par enchères.

importance des enchères dans l'économie

Plusieurs biens sont vendus par enchères:

- immobilier;
- antiquités, objets de collection (timbres, œuvres d'art, etc.);
- objets mis en vente à la suite de décès, faillites, saisies policières;

- certains biens, comme le bétail ou le poisson: en général l'acheteur (grossiste plutôt que détaillant ou consommateur) est sur place et inspecte la qualité du produit, puis soumet une offre pour un nombre prédéterminé d'animaux (bétail) ou de tonnes (poisson);
- tout ce qui s'achète par enchère sur internet (sur ebay, par exemple).

Le gouvernement vend aussi aux enchères les choses suivantes:

- droits d'exploitation forestière ou pétrolière;
- droits d'émission de matières polluantes;
- droit de diffusion sur des fréquences données (radio, téléphonie, etc.).

Et à tout ceci on peut ajouter les **appels d'offres**, qui sont en réalité des enchères inversées. Le gouvernement (ou une entreprise privée) veut acheter les services d'une firme pour combler un besoin (construction d'un édifice, installation d'une nouvelle technologie, formation d'une partie de son personnel dans un domaine quelconque, etc.). Il lance un appel d'offres dans les journaux et sur l'internet. Chaque firme intéressée à fournir ce service soumet une offre, c'est-à-dire le prix qu'elle serait prête à accepter pour le service en question. Dans ce cas, l'offre la plus *basse* l'emporte sur les autres.

Les biens et services transigés par enchères constituent donc une part importante de l'économie. D'où le besoin d'étudier les enchères.

2 Types d'enchères

Nous allons étudier quatre types d'enchères: enchère anglaise, anchère hollandaise, enchère scellée au premier prix, et enchère scellée au deuxième prix.

2.1 Enchère anglaise

L'enchère anglaise (ou *enchère ascendante*) est celle qu'on voit au cinéma (e.g. *North by Northwest*, *The Red Violin*) et à la télévision (e.g. *A Series of Unfortunater Events*). Et c'est bien sûr celle qui est utilisée dans les deux grandes maisons anglaises de ventes aux enchères, Christie's et Sotheby's.

Typiquement, les acheteurs sont tous présents en même temps, et chacun d'eux peut miser sur l'objet mis en vente. Ici *miser* veut dire faire une offre plus haute que l'offre précédente. L'enchère se termine lorsque personne n'est prêt à offrir plus que la dernière mise. L'objet est vendu à celui qui a fait la dernière mise, et cette mise est le prix qu'il paie.

On peut imaginer une version stylisée de cette enchère qui nous aidera à l'étudier. On affiche devant les acheteurs un prix hypothétique pour l'objet; ce prix commence à 0 et augmente de façon continue. Chaque acheteur garde la main levée tant et aussi longtemps qu'il est prêt à payer le prix affiché pour l'objet. Si le prix atteint un niveau qu'il juge trop haut pour lui, il baisse la main. On arrête le prix lorsqu'il n'y a plus qu'une seule main levée. Le dernier à avoir la main levée gagne l'enchère, et le prix qu'il paie est le dernier prix affiché.

2.2 Enchère hollandaise

L'enchère hollandaise (ou *enchère descendante*) fonctionne dans le sens inverse. On commence avec un prix très élevé, que personne n'est disposé à payer. Ensuite le prix est abaissé de façon continue, jusqu'à temps que quelqu'un se dise intéressé. L'enchère se termine, cet individu gagne, et il paie le dernier prix affiché.

2.3 Enchère cachetée au premier prix

Dans un enchère cachetée au premier prix, les acheteurs doivent soumettre leurs offres par écrit. Au terme d'une échéance prédeterminée, les offres soumises sont comparées. Le gagnant est celui qui a fait l'offre la plus élevée, et le prix qu'il paie est le prix qu'il a offert.

2.4 Enchère cachetée au deuxième prix

Une enchère cachetée au deuxième prix (ou *enchère de Vickrey*) fonctionne de la même manière que la précédente, sauf pour un détail. Le gagnant est encore une fois celui qui a fait l'offre la plus élevée, mais le prix qu'il doit payer est égal à la *deuxième offre la plus élevée* (donc à la plus haute offre non-gagnante).

Ce type d'enchère est utilisé sur internet.

2.5 Enchère à la chandelle

Un cinquième type d'enchère, que nous n'allons pas étudier formellement, mais qui est intéressant quand même, s'appelle enchère à la chandelle. L'enchère procède comme une enchère anglaise, mais avec une durée limitée: l'enchère se termine lorsqu'une chandelle qu'on a allumée pour l'occasion s'éteint, ou lorsqu'une épingle insérée dans cette chandelle tombe.

Ces enchères étaient communes en Angleterre autrefois; dans le roman d'aventure *Moonfleet*, publié en 1898 mais encore lu aujourd'hui, le sort d'un des personnages principaux est déterminé par le résultat d'une telle enchère. Aujourd'hui, plusieurs enchères sur internet ont une échéance pour soumettre des offres, et donc fonctionnent essentiellement comme des enchères à la chandelle.

Ce qui est stratégiquement optimal dans une enchère avec échéance, c'est d'être celui qui soumet la dernière offre, juste avant l'échéance, une offre un peu plus élevée que la précédante. Ceci s'appelle *slamming* ou *sniping* en anglais. Mais être le dernier à soumettre une offre n'est pas facile lorsque tout le monde essaie d'être le dernier. Et effectivement, le gros de l'action dans les enchères avec échéance se passe dans les dernières secondes, si l'objet en vente est le moindrement intéressant. Il y a même des services (e.g. bidslammer) qui peuvent slammer pour vous.

Il y a un peu moins de slamming lorsque l'échéance n'est pas connue avec certitude, comme c'est le cas avec une chandelle. [Le diariste Samuel Pepys a toutefois noté que certains acheteurs experts observaient la fumée de la chandelle et pouvaient déterminer à une seconde près quand celle-ci allait s'éteindre.] Certaines enchères sur internet ont une échéance aléatoire, justement pour éviter le slamming.

3 Stratégies optimales et équivalences

Etudions maintenant le comportement optimal d'un acheteur dans les quatre types d'enchères. Le contexte que nous étudions est le suivant:

1. Il y a un seul objet à vendre.

2. Il y a N acheteurs potentiels. Un seul d'entre eux (le gagnant de l'enchère) achètera l'objet.

3. La valeur de l'objet est subjective: chaque acheteur attache une valeur différente à l'objet. Spécifiquement, chaque acheteur i attache une valeur v_i à l'objet.

4. Le but d'un acheteur n'est pas de gagner l'enchère à tout prix. Le but d'un acheteur est de maximiser son **surplus**, qui est:

$$u_i = \begin{cases} v_i - p & \text{s'il gagne l'enchère et paie un prix } p \quad ; \\ 0 & \text{s'il ne gagne pas} \quad . \end{cases} \tag{1}$$

5. La valeur v_i d'un acheteur est connue de lui seul. Donc un acheteur connaît sa valeur mais pas celles des autres acheteurs. Nous supposons toutefois que les valeurs sont identiquement et indépendamment distribuées à partir

d'une fonction de distribution $F(v)$ connue de tous. [Voir appendice sur les fonctions de distribution.]

Dans un tel contexte, un acheteur doit choisir sa stratégie optimale. Dans chaque enchère, ce choix se résume à un seul prix:

- le prix auquel l'acheteur abandonne l'enchère, i.e. baisse la main, dans une enchère anglaise;
- le prix auquel il est prêt à se montrer intéressé, i.e. à lever la main, dans une enchère hollandaise;
- le prix qu'il soumet, dans une enchère cachetée au premier ou au deuxième prix.

Dans chaque cas, on parlera de la **mise** d'un agent. La mise de l'agent i sera dénotée par b_i.

Comme la mise optimale d'un agent dépendra nécessairement de sa valeur v_i, on parlera aussi de sa **fonction de mise**, qui se dénote $b_i(v_i)$. C'est tout simplement la mise b_i exprimée en termes de la valeur v_i.

3.1 Stratégie optimale dans l'enchère anglaise

Considérons la version stylisée de l'enchère anglaise: le prix affiché commence à 0 et monte graduellement. Ce qu'un acheteur doit décider est à quel prix abandonner la partie. Il se peut, bien sûr, que l'enchère se termine en sa faveur avant que ce prix ne soit atteint; mais il ne peut pas savoir d'avance s'il va gagner l'enchère ou non. Il doit donc, dans tous les cas, se faire une idée du prix auquel il renoncera finalement à l'objet.

Une manière utile de réféchir à ceci est de procéder par optimisation à la marge. Ceci consiste à envisager un prix quelconque et voir s'il est préférable pour l'acheteur d'agir immédiatement (i.e. de baisser la main) ou d'attendre.

Supposons d'abord que le prix n'est pas encore parvenu à la valeur de l'acheteur, c'est-à-dire que $p < v_i$. S'il baisse la main maintenant, il obtient automatiquement une utilité de 0, car ce sera quelqu'un d'autre qui gagnera l'enchère. Si par contre il laisse sa main levée et la baisse un peu plus tard (mais avant que le prix n'atteigne v_i) alors il va peut-être perdre l'enchère de toute façon, mais il est possible aussi qu'il la gagne, et à un prix inférieur à v_i. Dans ce dernier cas, son utilité serait positive. Donc, en termes d'espérance d'utilité, il est préférable de ne pas abandonner tout de suite.

Supposons maintenant que le prix affiché a atteint ou dépassé la valeur de l'acheteur, autrement dit que $p \geq v_i$. Si l'acheteur abandonne, il obtient une utilité de 0. S'il continue de laisser sa main levée, même pendant un seul instant, il est possible qu'il gagne l'enchère et qu'il doive payer un prix supérieur à sa valeur. Dans ce cas, il aurait une utilité négative. En termes d'espérance d'utilité, il est donc préférable d'abandonner.

La seule conclusion possible est qu'il est optimal d'abandonner exactement lorsque le prix atteint v_i. Donc la mise optimale est $b_i = v_i$.

3.2 Stratégie optimale dans l'enchère cachetée au deuxième prix

Considérons le cas de l'acheteur i dans une enchère cachetée au deuxième prix. Appelons $\hat{b}$ la plus haute mise qui n'est pas la sienne. Bien entendu, l'acheteur i ne connaît pas la valeur de $\hat{b}$. Ce qu'il sait, c'est que s'il gagne l'enchère (i.e. si $b_i > \hat{b}$), alors $\hat{b}$ sera le prix qu'il paiera. Donc son surplus sera

$$u_i = \begin{cases} v_i - \hat{b} & \text{si } b_i > \hat{b} \quad ; \\ 0 & \text{si } b_i \leq \hat{b} \quad . \end{cases} \tag{2}$$

On s'aperçoit que sa mise b_i affectera ses chances de gagner ou de perdre, mais n'affectera pas la valeur même de son surplus s'il gagne (celle-ci dépend de v_i et de $\hat{b}$, mais pas de b_i). On remarque aussi que l'acheteur i voudrait gagner l'enchère si $\hat{b} < v_i$ mais ne voudrait pas la gagner si $\hat{b} > v_i$.

En réfléchissant à ces observations, on déduit que sa stratégie optimale est de miser $b_i = v_i$.

3.3 Equivalence de l'enchère anglaise et de l'enchère cachetée au deuxième prix

On constate que la stratégie optimale est la même pour l'enchère anglaise et l'enchère cachetée au deuxième prix, soit $b_i = v_i$. Qu'en est-il des prix payés par le gagnant? Une enchère anglaise prend fin lorsqu'il ne reste qu'une main levée, c'est-à-dire dès que la personne avec la *deuxième* plus haute valeur ait baissé la main. Le prix payé par le gagnant est donc pratiquement égal à cette deuxième plus haute valeur. Conclusion: ces deux enchères sont équivalentes.

3.4 Stratégie optimale dans l'enchère hollandaise

Maintenant nous étudions l'enchère hollandaise. L'analyse ici sera plus compliquée que pour les deux enchères précédentes. La mise optimale d'un agent ne dépendra pas seulement de sa valeur v_i. Elle dépendra aussi de la distribution des valeurs $F(\cdot)$, qu'il faudra spécifier, et des mises de tous les autres acheteurs.

Il ne faut pas oublier que nous sommes à la recherche d'un équilibre de Nash. A l'équilibre, la fonction de mise $b_i(v_i)$ d'un agent i est optimale étant données les $N - 1$ autres fonctions de mise utilisées par les autres agents.

Typiquement, lorsqu'on étudie les enchères hollandaises, on suppose un équilibre symétrique, dans lequel tous les acheteurs utilisent la même fonction de mise $b(v)$. Les valeurs v_i des N acheteurs sont bien sûr toutes différentes, et donc les mises le seront aussi. Mais la relation mathématique entre la mise b_i d'un acheteur et sa valeur v_i sera la même pour tous les acheteurs.

Donc, juste pour être clair, dans un équilibre symétrique, la mise $b(v)$ est optimale pour chaque acheteur lorsque les $N-1$ autres acheteurs utilisent cette même fonction de mise $b(v)$.

Considérons la version stylisée de l'enchère: le prix descend jusqu'à temps que quelqu'un décide d'acheter l'objet. Prenons le cas d'un acheteur qui attache une valeur v_i à l'objet. Utilisons de nouveau l'approche de l'optimisation à la marge: pour un prix donné p, si personne n'a encore acheté l'objet, l'acheteur i devrait-il l'acheter immédiatement ou attendre un peu?

Une chose est certaine: si $p > v_i$, lever la main entraînerait un surplus négatif, donc il attendra. Dans ce qui suit, on suppose que $p \leq v_i$.

Si l'acheteur achète immédiatement, il aura comme surplus $v_i - p$. S'il attend que le prix descende jusqu'à $p - \Delta p$, deux choses peuvent se produire. Si personne d'autre ne lève la main dans cet intervalle de temps, il sera en mesure d'acheter l'objet au prix $p - \Delta p$, ce qui constitue pour lui un gain de Δp comparativement au surplus de $v_i - p$ qu'il pouvait avoir lorsque le prix était p. Mais si quelqu'un d'autre lève la main avant que le prix n'atteigne $p - \Delta p$, alors notre acheteur perd la chance d'acheter l'objet et obtiendra un surplus nul, ce qui constitue une perte de $v_i - p$.

Il y a donc une possibilité de gain et une possibilité de perte. Et il faudra pondérer ces deux possibilités avec les probabilités qu'elles se réalisent. Ceci nous donnera ce qu'il convient d'appeler le **bénéfice marginal** et le **coût marginal** d'attendre.

Si le gain marginal d'attendre est supérieur au coût marginal, alors il est préférable d'attendre que le prix descende à $p - \Delta p$. Et que fait-on une fois que le prix parvient à $p - \Delta p$? On recommence l'analyse. Ce n'est que lorsque l'écart entre bénéfice marginal et coût marginal sera réduit à zéro que le moment sera venu de lever la main.

Une probabilité importante dans ce qui suivra (appelons-la X) est la probabilité que personne ne lève la main pendant que le prix descend de p à $p - \Delta p$. Il s'agit d'une probabilité conditionnelle, car on suppose *a priori* que le prix est déjà descendu jusqu'à p sans que personne ne lève la main, ce qui n'est pas un événement certain. Alors

$$X = \Pr\{\text{personne d'autre ne lève la main entre } p \text{ et } p - \Delta p \mid \text{personne d'autre n'a levé la main avant } p\} \quad .$$

Voir l'appendice si vous ne savez pas ce qu'est une probabilité conditionnelle.

Notre condition d'optimalité est donc

$$\Delta p \cdot X = (v_i - p) \cdot (1 - X) \qquad . \tag{3}$$

Le prix p qui résout cette équation sera le prix auquel il faut lever la main; ce sera donc la mise optimale. Mais comment calcule-t-on la probabilité X ?

Tout d'abord, calculons X_j, la probabilité qu'*un seul* acheteur (l'acheteur j, où $j \neq i$) ne lève pas la main durant cet intervalle de temps, sachant qu'il n'a pas levé la main avant que le prix n'atteigne p.

$$\begin{aligned}
X_j &= \Pr\{b_j < p - \Delta p \mid b_j < p\} && (4)\\
&= \frac{\Pr\{b_j < p - \Delta p\}}{\Pr\{b_j < p\}} && (5)\\
&= \frac{\Pr\{b(v_j) < p - \Delta p\}}{\Pr\{b(v_j) < p\}} && (6)
\end{aligned}$$

Pour résoudre ceci, il faut en savoir un peu plus sur la distribution des valeurs et sur la fonction de mise.[1] Nous allons supposer, pour ce cas-ci, que les valeurs des N acheteurs suivent une distribution uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. Donc $F(x) = x$. Puis on suppose que la fonction de mise a la forme suivante:

$$b(v) = \alpha\ v$$

où α est un paramètre inconnu. Donc on a

$$\begin{aligned}
X_j &= \frac{\Pr\{\alpha\ v_j < p - \Delta p\}}{\Pr\{\alpha\ v_j < p\}} && (7)\\
&= \frac{\Pr\{v_j < (p - \Delta p)/\alpha\}}{\Pr\{v_j < p/\alpha\}} && (8)\\
&= \frac{F((p - \Delta p)/\alpha)}{F(p/\alpha)} && (9)\\
&= \frac{(p - \Delta p)/\alpha}{p/\alpha} && (10)\\
&= \frac{p - \Delta p}{p} && (11)
\end{aligned}$$

[1] En fait on peut continuer *sans* faire de supposition sur la fonction de mise. Il faut définir la fonction inverse de $b(v)$ et ensuite résoudre une équation différentielle.

[Lorsqu'on invoque la fonction F, il ne faut pas se soucier du fait que l'inégalité est stricte plutôt que faible: cela n'a aucun effet, puisque le support de la distribution est continu.]

Maintenant nous devons trouver X, la probabilité qu'*aucun* des $N-1$ autres acheteurs ne mise entre p et $p-\Delta p$. Les mises des $N-1$ sont indépendantes l'une de l'autre, donc cette probabilité n'est que

$$X = X_j^{N-1} = \left[\frac{p-\Delta p}{p}\right]^{N-1} \qquad .$$

Maintenant que nous connaissons X, nous pouvons substituer dans notre condition d'optimalité:

$$\Delta p \cdot \left[\frac{p-\Delta p}{p}\right]^{N-1} \;=\; (v_i - p)\cdot\left[1-\left[\frac{p-\Delta p}{p}\right]^{N-1}\right] \qquad . \tag{12}$$

On simplifie:

$$\Delta p \cdot [p-\Delta p]^{N-1} \;=\; (v_i - p)\cdot\left[p^{N-1} - [p-\Delta p]^{N-1}\right] \qquad . \tag{13}$$

On divise par Δp des deux côtés:

$$[p-\Delta p]^{N-1} \;=\; (v_i - p)\cdot\left[\frac{p^{N-1} - [p-\Delta p]^{N-1}}{\Delta p}\right] \qquad . \tag{14}$$

L'analyse qu'on est en train de faire sera d'autant plus précise que la différence de prix Δp sera petite. Donc la prochaine étape consiste à prendre la limite des expressions à gauche et à droite de l'équation lorsque $\Delta p \to 0$.

$$\lim_{\Delta p \to 0} [p-\Delta p]^{N-1} \;=\; \lim_{\Delta p \to 0} (v_i - p)\cdot\left[\frac{p^{N-1} - [p-\Delta p]^{N-1}}{\Delta p}\right] \qquad . \tag{15}$$

Ceci donne comme résultat (en utilisant la règle de L'Hospital à droite):

$$p^{N-1} \;=\; (v_i - p)\cdot(N-1)p^{N-2} \qquad . \tag{16}$$

On isole p, ce qui donne:

$$p = \left(\frac{N-1}{N}\right) v_i \qquad . \tag{17}$$

C'est le prix auquel il est optimal de lever la main si notre valeur est v_i. C'est donc la mise optimale.

$$b_i = \left(\frac{N-1}{N}\right) v_i \qquad . \tag{18}$$

Voilà pour l'agent i. Qu'en est-il des $N-1$ autres acheteurs? Leurs mises à eux sont-elles optimales? Nous avons supposé qu'ils misent selon la fonction $b = \alpha\ v$, sans toutefois spécifier α. On note que si $\alpha = (N-1)/N$, alors *tous* les acheteurs (incluant l'acheteur i) utilisent la même fonction de mise. Et on a démontré qu'elle est optimale pour un acheteur lorsque tous les autres l'utilisent. On a donc un équilibre symétrique, où tous les acheteurs utilisent

$$b(v) = \left(\frac{N-1}{N}\right) v \qquad . \tag{19}$$

3.5 Stratégie optimale dans l'enchère cachetée au premier prix

Pour trouver l'équilibre d'une enchère cachetée au premier prix, on considère que chaque acheteur choisit sa mise afin de maximiser son espérance d'utilité:

$$\max_{b_i}\ \mathrm{E}u_i \;\; = \;\; \Pr\{\text{gagner}\} \cdot (v_i - b_i) \;\; + \;\; \Pr\{\text{perdre}\} \cdot 0 \qquad . \tag{20}$$

Pour l'acheteur i, la probabilité de gagner l'enchère dépend de sa propre mise mais aussi de celles de tous les autres acheteurs. Pour gagner, sa mise doit être la plus haute. Donc on a

$$\max_{b_i}\ \mathrm{E}u_i \;\; = \;\; \Pr\{b_i > b_j \;\; \text{pour tout } j \neq i\} \cdot (v_i - b_i) \qquad . \tag{21}$$

L'acheteur doit choisir sa mise sans connaître celles des autres. Il choisit en fonction de l'information dont il dispose, soit: le nombre d'acheteurs N, la distribution des valeurs $F(v)$, et bien sûr sa propre valeur v_i. Comme le choix optimal de b_i dépend de v_i, le résultat de l'optimisation sera une fonction de mise $b_i(v_i)$, comme d'ans l'analyse de l'enchère hollandaise. Et comme dans cette analyse, nous supposerons l'existence d'un équilibre symétrique, dans lequel tous les acheteurs utilisent la même fonction de mise $b(v)$.

Reprenons le problème de l'acheteur i. Il faut trouver

$$\max_{b_i}\ \mathrm{E}u_i \;\; = \;\; \Pr\{b_i > b(v_j) \;\; \text{pour } j \neq i\} \cdot (v_i - b_i) \qquad . \tag{22}$$

Les mises sont statistiquement indépendantes les unes des autres, donc:

$$\max_{b_i} \ \mathrm{E}u_i \quad = \quad [\ \Pr\{b_i > b(v_j)\}\ ]^{N-1} \cdot (v_i - b_i) \qquad . \tag{23}$$

Supposons, comme pour l'enchère hollandaise, que $F(x) = x$ (distribution uniforme sur l'intervalle unitaire) et que $b(v) = \alpha\ v$, où α est indéterminé. Alors

$$\max_{b_i} \ \mathrm{E}u_i \ = \ [\ \Pr\{b_i > \alpha\ v_j\}\ ]^{N-1} \cdot (v_i - b_i) \tag{24}$$

$$= \ [\ \Pr\{v_j < b_i/\alpha\}\ ]^{N-1} \cdot (v_i - b_i) \tag{25}$$

$$= \ [\ F(b_i/\alpha)\ ]^{N-1} \cdot (v_i - b_i) \tag{26}$$

$$= \ [\ b_i/\alpha\ ]^{N-1} \cdot (v_i - b_i) \tag{27}$$

C'est un simple problème de maximisation sans contrainte. La solution est

$$b_i = \left(\frac{N-1}{N}\right) v_i \qquad . \tag{28}$$

Suivant les mêmes arguments que pour l'enchère hollandaise, on peut conclure qu'on a un équilibre symétrique si on fixe $\alpha = (N-1)/N$. Donc

$$b(v) = \left(\frac{N-1}{N}\right) v \qquad . \tag{29}$$

3.6 Equivalence de l'enchère hollandaise et de l'enchère cachetée au premier prix

Notre étude de l'enchère hollandaise et de l'enchère cachetée au premier prix nous a mené à la même solution pour les deux. Y a-t-il une équivalence entre ces deux enchères?

La réponse est oui, et on peut s'en convaincre en se demandant si le raisonnement qu'on vient d'utiliser pour l'enchère cachetée au premier prix (maximisation de l'espérance d'utilité) pourrait aussi être utilisé pour l'enchère hollandaise.

Au cours de l'enchère hollandaise, alors que le prix est en train de descendre, l'acheteur i n'apprend rien sur les autres acheteurs qui puisse influencer son choix de mise optimale. Il pourrait donc faire son choix de mise avant même le début de l'enchère. S'il faisait cela, son choix consisterait à maximiser son espérance d'utilité, soit

$$\max_{b_i} \mathrm{E}u_i \quad = \quad \Pr\{\text{gagner}\} \cdot (v_i - b_i) \quad + \quad \Pr\{\text{perdre}\} \cdot 0 \qquad . \tag{30}$$

Ceci est identique à l'espérance d'utilité pour l'enchère cachetée au premier prix. On peut donc conclure que les deux enchères sont équivalentes.

4 Appels d'offres

Un appel d'offres est une sorte d'enchère où l'enjeu est l'obtention d'un contrat. Les rôles d'acheteurs et de vendeurs sont en quelque sorte inversés.

Supposons qu'un gouvernement veut construire un édifice. Il va typiquement donner le contrat de construction à une compagnie privée. Mais à laquelle et pour quel montant d'argent? Afin de minimiser les dépenses publiques et de donner à toutes les compagnies intéressées la chance d'obtenir le contrat, le gouvernement lance un appel d'offres. Il s'agit d'une annonce dans les journaux, sur son site web, ou sur une autre plate-forme publique, invitant les compagnies de construction à soumettre une offre (une mise, autrement dit). Une offre consiste en un prix que la compagnie accepterait comme paiement pour construire l'édifice. A l'échéance de l'appel, les offres sont comparées et le contrat est octroyé à la compagnie qui a soumis l'offre la plus **basse**.[2]

Une compagnie qui participe à un appel d'offres aura comme profit

$$\pi_i = \begin{cases} p - c_i & \text{si elle obtient le contrat au prix } p \quad ; \\ 0 & \text{si elle n'obtient pas le contrat} \quad . \end{cases} \tag{31}$$

où c_i est son coût de construire l'édifice. Il y a N compagnies, et c'est le coût de construction qui les différencie. Chaque compagnie a son coût à elle, qui est son information privée; elle connaît le sien mais pas celui des autres compagnies. On suppose cependant que les coûts des N compagnies suivent une distribution $F(\cdot)$ connue de tous.

Le processus est similaire à une enchère cachetée au premier prix, et nous l'analyserons avec la même méthode. La compagnie i a une espérance de profit de

$$\max_{b_i} \mathrm{E}\pi_i \quad = \quad \Pr\{\text{gagner}\} \cdot (b_i - c_i) \quad + \quad \Pr\{\text{perdre}\} \cdot 0 \tag{32}$$

$$= \quad \Pr\{b_i < b_j \ \text{ pour tout } j \neq i\} \cdot (b_i - c_i) \qquad . \tag{33}$$

[2]On sait que, malheureusement, la corruption interfère parfois dans ce mécanisme. Ici on fait l'hypothèse qu'il n'y a pas de corruption.

On suppose l'existence d'un équilibre symétrique, dans lequel toutes les compagnies utilisent la même fonction de mise $b(c)$. Aussi, les mises sont statistiquement indépendantes les unes des autres. Donc

$$\max_{b_i} \mathrm{E}\pi_i = \Pr\{b_i < b(c_j) \ \text{ pour } j \neq i\} \cdot (b_i - c_i) \tag{34}$$

$$= [\Pr\{b_i < b(c_j)\}\ ]^{N-1} \cdot (b_i - c_i) \qquad . \tag{35}$$

Pour cet exemple-ci, nous allons supposer que les coûts sont distribués uniformément sur l'intervalle unitaire (donc $F(x) = x$), et que la fonction de mise d'équilibre est linéaire, c'est-à-dire $b(c) = \alpha c + \beta$, où α et β sont des paramètres indéterminés. Alors

$$\max_{b_i} \mathrm{E}\pi_i = [\ \Pr\{b_i < \alpha\ c_j + \beta\}\ ]^{N-1} \cdot (b_i - c_i) \tag{36}$$

$$= [\ \Pr\{c_j > (b_i - \beta)/\alpha\}\ ]^{N-1} \cdot (b_i - c_i) \tag{37}$$

$$= [\ 1 - F((b_i - \beta)/\alpha)\ ]^{N-1} \cdot (b_i - c_i) \tag{38}$$

$$= \left[\ 1 - \left(\frac{b_i - \beta}{\alpha}\right)\ \right]^{N-1} \cdot (b_i - c_i) \tag{39}$$

Ce problème de maximisation a comme solution

$$b_i = \left(\frac{N-1}{N}\right) c_i + \left(\frac{\alpha + \beta}{N}\right) \qquad . \tag{40}$$

On aura un équilibre symétrique si cette fonction de mise optimale est la même que celle utilisée par les $N-1$ autres compagnies, soit $b = \alpha c + \beta$. Pour cela il faut que

$$\alpha = \frac{N-1}{N} \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{\alpha + \beta}{N} \tag{41}$$

On doit isoler β dans la deuxième équation, puis substituer la valeur de α, pour enfin trouver $\beta = 1/N$. La fonction de mise d'équilibre est donc

$$b(v) = \left(\frac{N-1}{N}\right) c + \left(\frac{1}{N}\right) \qquad . \tag{42}$$

Appendice 1: Fonction de distribution cumulative

Je tenterai ici d'expliquer ce qu'est une **fonction de distribution cumulative** (ou fdc), appelée aussi **fonction de répartition**. Une fonction de distribution cumulative $F(\cdot)$ est une fonction non-décroissante définie sur un domaine $[a, b]$ qu'on appelle le **support** de la distribution. Ce support peut être fini ou infini, c'est-à-dire que a peut être $-\infty$ et b peut être ∞. En plus du fait qu'elle est non-décroissante, les propriétés principales d'une fdc sont :

$$F(a) = 0 \qquad \text{et} \qquad F(b) = 1 \qquad . \tag{43}$$

Une fdc sert à mesurer la probabilité qu'une variable aléatoire v_i prenne une valeur dans un intervalle donné. Spécifiquement,

$$F(x) = Prob\{v \leq x\} \qquad \text{pour tout } x \in [a, b] \qquad . \tag{44}$$

Et de ceci on peut déduire que

$$1 - F(x) = Prob\{v > x\} \qquad \text{pour tout } x \in [a, b] \tag{45}$$

et que

$$F(x_2) - F(x_1) = Prob\{x_1 < v \leq x_2\}$$
$$\text{pour tous } x_1, x_2 \in [a, b] \text{ tels que } x_1 < x_2 \qquad .$$

La dérivée d'une fonction de distribution cumulative s'appelle **fonction de densité**. C'est une fonction très utile en économie, mais dont on ne se servira pas dans ce cours.

Exemple 1. Distribution uniforme

Si la variable aléatoire v est distribuée uniformément sur l'intervalle $[a, b]$, alors

$$F(x) = \frac{x - a}{b - a} \qquad . \tag{46}$$

Exemple 2. Distribution exponentielle

Si la variable aléatoire v est distribuée exponentiellement, alors

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \qquad . \tag{47}$$

où λ est une constante positive. Le support d'une distribution exponentielle est toujours $[0, \infty[$.

Appendice 2: Probabilité conditionnelle

Supposons que dans une pièce il y a les objets suivants:

- 3 ballons verts
- 4 ballons jaunes
- 5 livres verts
- 6 livres jaunes

On pige un objet au hasard. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un ballon et la probabilité qu'il s'agisse d'un livre?

$$Pr\{\text{ballon}\} = 7/18 \qquad ; \qquad Pr\{\text{livre}\} = 11/18 \qquad . \tag{48}$$

Maintenant supposons qu'on sait que l'objet pigé au hasard est vert. Alors maintenant quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un ballon et celle qu'il s'agisse d'un livre?

$$Pr\{\text{ballon} \mid \text{l'objet est vert}\} = 3/8 \quad ; \quad Pr\{\text{livre} \mid \text{l'objet est vert}\} = 5/8 \quad .(49)$$

L'opération exécutée ici s'appelle **mise à jour bayesienne**. Le symbole | signifie "conditionnel à ce que" ou encore "sachant que". La formule est

$$Pr\{A|B\} = \frac{Pr\{A \text{ et } B\}}{Pr\{B\}} \qquad . \tag{50}$$

Dans certains cas (comme dans l'analyse de l'enchère hollandaise), l'événement A ne peut être vrai que si B est vrai aussi. Alors on a $Pr\{A \text{ et } B\} = Pr\{A\}$ et donc

$$Pr\{A|B\} = \frac{Pr\{A \text{ et } B\}}{Pr\{B\}} = \frac{Pr\{A\}}{Pr\{B\}} \qquad . \tag{51}$$