ECONOMIE DES CONFLITS (SUITE)

① maximise

$$\pi_1 = \left(\frac{G_1}{G_1+G_2}\right)R - cG_1$$

② maximise

$$\pi_2 = \left(\frac{G_2}{G_1+G_2}\right)R - cG_2$$

équilibre :

$$G_1^* = G_2^* = \frac{R}{4c}$$

Analysons l'équilibre :

R = total des gains potentiels

mais

$$\pi_1 = \pi_2 = R/4$$

donc $\pi_1 + \pi_2 = R/2$

= total des gains réalisés

Pourquoi si peu?

Parce que

dépenses en armement

$= cG_1 + cG_2$

$= R/4 + R/4$

$= R/2$

Voilà la source de l'inefficacité

A l'équilibre on a

$G_1 > 0$ et $G_2 > 0$.

Les deux joueurs s'arment.

Cela veut-il dire qu'il y a combat ? Pas nécessairement.

Cela peut être un "standoff", i.e. une paix armée :

une situation où l'armement de chacun est suffisant pour dissuader l'autre d'attaquer.

On devrait préciser que P_1 et P_2 sont définis ainsi :

$$P_1 = \frac{G_1}{G_1+G_2} \quad \text{et} \quad P_2 = \frac{G_2}{G_1+G_2}$$

et donc pas définis pour $G_1 = G_2 = 0$.

On aurait dû spécifier que

$$P_1 = P_2 = 1/2 \text{ lorsque } G_1 = G_2 = 0.$$

Pourquoi $G_1 = G_2 = 0$ n'est pas un équilibre ?

Supposons que $G_1 = G_2 = 0$.

Alors $P_1 = P_2 = 1/2$.

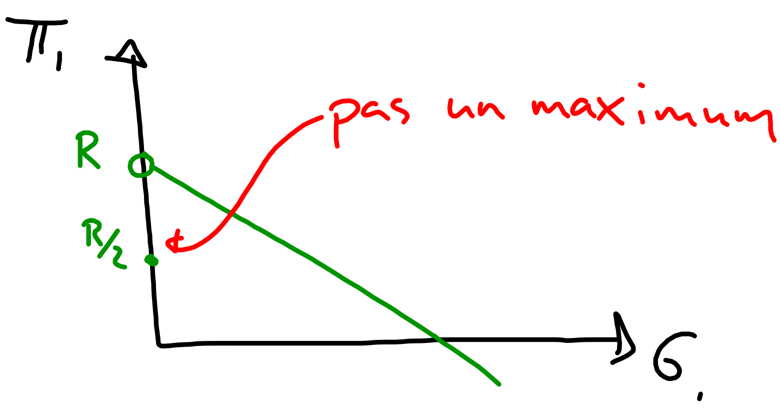
Donc

$$\Pi_1 = \Pi_2 = \left(\tfrac{1}{2}\right)R - c \cdot 0 = R/2$$

Supposons que $G_2 = 0$ est fixé, mais que 1 peut changer d'idée

$$\Pi_1 = \begin{cases} \left(\frac{G_1}{G_1 + 0}\right)R - cG_1 & \text{si } G_1 > 0 \\ \frac{R}{2} & \text{si } G_1 = 0 \end{cases}$$

donc $\Pi_1 = \begin{cases} R - cG_1 & \text{si } G_1 > 0 \\ R/2 & \text{si } G_1 = 0 \end{cases}$



Le choix $G_1 = 0$ ne maximise pas Π_1, donc $G_1 = G_2 = 0$ n'est pas un équilibre.

Deuxième modèle :

chaque joueur a une dotation :

(1) a une dotation W_1

(2) . ———— — -- W_2

Les dépenses en armement doivent être faites à partir de cette somme.

Ce qui reste après ces dépenses peut être consommé, mais à qui appartiendra "ce qui reste" ?

---

coût par unité d'armement $= c$

fonc. de succès :

$$P_1 = \frac{G_1}{G_1+G_2} \quad \text{et} \quad P_2 = \frac{G_2}{G_1+G_2}$$

Paiements :

$$\Pi_1 = \left(\frac{G_1}{G_1+G_2}\right) RTN$$

$$\Pi_2 = \left(\frac{G_2}{G_1+G_2}\right) RTN$$

où RTN = richesse totale nette

$$RTN = \underbrace{(W_1 - cG_1)}_{\text{richesse nette de (1)}} + \underbrace{(W_2 - cG_2)}_{\text{richesse nette de (2)}}$$

(1) maximise

$$\pi_1 = \left(\frac{G_1}{G_1+G_2}\right)\left[W_1 - cG_1 + W_2 - cG_2\right]$$

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial G_1} = \left[\frac{G_2}{(G_1+G_2)^2}\right]\left[W_1 - cG_1 + W_2 - cG_2\right]$$

$$- c\left(\frac{G_1}{G_1+G_2}\right) = 0$$

$$\rightarrow \quad G_2\left[W_1 + W_2 - cG_1 - cG_2\right] = cG_1(G_1+G_2)$$

... et similairement pour (2)

$$\rightarrow \quad G_1\left[W_1 + W_2 - cG_1 - cG_2\right] = cG_2(G_1+G_2)$$

Le problème étant symétrique, nous allons supposer que l'équilibre l'est aussi :

$$G_1 = G_2 = G$$

Chaque CPO devient

$$G\left[W_1 + W_2 - 2cG\right] = 2cG^2$$

$$\rightarrow \quad W_1 + W_2 - 2cG = 2cG$$

$$\rightarrow \quad G = \frac{w_1 + w_2}{4c}$$

On a négligé d'inclure une contrainte budgétaire, qui serait

$$cG_1 \leq w_1$$
$$cG_2 \leq w_2 \quad .$$

Donc la solution

$$G_1 = G_2 = \frac{w_1 + w_2}{4c}$$

est une solution intérieure, autrement dit elle n'est valide que si elle satisfait ces contraintes.

Elle n'es donc valide que si

$$cG_1 \leq w_1$$
et.
$$cG_2 \leq w_2$$

$$cG_1 \leq w_1$$
$$c\left(\frac{w_1 + w_2}{4c}\right) \leq w_1$$
$$w_1 + w_2 \leq 4w_1$$
$$w_2 \leq 3w_1$$

$$w_1 \leq 3w_2$$

Qu'arrive-t-il si une de ces conditions n'est pas satisfaite?

Par exemple, si $W_1 > 3W_2$?

La réponse : une solution de coin

dans laquelle un des joueurs dépense toute sa dotation en armement.

Quel joueur?

2, parce qu'il a beaucoup à gagner et peu à perdre.

solution: $G_2 = \frac{W_2}{c}$

On trouve G_1 en substituant $G_2 = W_2/c$ dans la CPO de 1 :

$$G_1 = \frac{-W_2 + \sqrt{W_1 + W_2}}{c}$$