ENCHÈRES

Pour modéliser les enchères, on fait les hypothèses suivantes :

- il y a un seul objet à vendre.
- il y a N acheteurs potentiels ; un seul d'entre eux achètera l'objet.
- la valeur de l'objet est subjective : chaque acheteur lui attache une valeur différente.
- appelons v_i la valeur que l'acheteur i attache à l'objet.

Son utilité (surplus du consommateur, en fait) sera alors

$$u_i = \begin{cases} v_i - p & \text{s'il achète l'objet au prix } p \\ 0 & \text{s'il n'achète pas l'objet} \end{cases}$$

- la valeur v_i que l'acheteur i attache à l'objet n'est connue que de lui-même : c'est de l'information privée.

- cependant, on fera l'hypothèse que les N valers $v_1, v_2, ..., v_N$ suivent une distribution $F(\cdot)$ connue de tous.

MISES.

Dans une enchère, chaque acheteur i doit choisir une stratégie (qu'on appelle "mise") b_i.

La signification exacte de la mise b_i varie selon le type d'enchère.

- <u>enchère anglaise</u>:

  mise = le prix auquel on baisse la main, i.e. le prix auquel on renonce finalement à l'objet.

- <u>enchère hollandaise</u>:

  mise = le prix auquel on lève la main, i.e. le prix auquel on décide d'acheter l'objet (si personne ne l'a encore fait).

- <u>enchère cachetée (1er prix, 2e prix)</u>

  mise = le prix qu'on écrit et qu'on soumet.

Remarques :

1. La mise gagnante devient le prix de vente p dans seulement 2 des 4 types d'enchère :
   - enchère hollandaise
   - enchère cachetée au 1er prix.

   Dans les 2 autres cas, la mise la plus haute détermine l'identité de la personne qui achètera l'objet. La deuxième plus haute mise sera le prix payé p.

2. Chaque acheteur choisit une seule chose : sa mise. De plus, cette décision se fait sans vraiment savoir le choix des autres.

   Donc on peut traiter une enchère comme un jeu simultané.

DISTRIBUTIONS.

Une fonction de distribution cumulative (appelée aussi fonction de répartition) $F(\cdot)$ est une fonction non-décroissante définie sur un intervalle $[a,b]$ et telle que

$$F(a)=0 \quad \text{et} \quad F(b)=1$$

On s'en sert pour mesurer la probabilité qu'une variable aléatoire (VA) ait une valeur dans un intervalle donné.

Alors si v est une VA distribuée selon une $F(\cdot)$, on sait que

$$F(x) = Pr\{v \leq x\} \quad \text{pour tout } x \in [a,b]$$

$$1-F(x) = Pr\{v > x\} \quad \text{pour tout } x \in [a,b]$$

$$F(x_2)-F(x_1) = Pr\{x_1 < v \leq x_2\}$$

pour tout $x_1, x_2 \in [a,b]$ tel que $x_1 < x_2$

MISES OPTIMALES :

enchère anglaise :

$b_i = v_i$

Pourquoi ? Si le prix p est encore $< v_i$, alors baisser la main entraîne immédiatement $u_i = 0$, tandis que laisser la main levée un peu plus longtemps (sans toutefois laisser p dépasser v_i) donne une chance d'avoir $u_i > 0$.

Lorsque p atteint v_i, cet argument ne tient plus. Laisser la main levée ne donne qu'une chance d'obtenir $u_i < 0$.

enchère cachetée au 2e prix

même chose.

$b_i = v_i$

enchère hollandaise:

$b_i < v_i$

Pourquoi?

Parce que ① $b_i > v_i$ entraîne $u_i < 0$
(ou $u_i = 0$ si quelqu'un d'autre obtient l'objet)

② $b_i = v_i$ entraîne $u_i = 0$ assurément

③ $b_i < v_i$ donne une chance d'avoir $u_i > 0$ (et aucune d'avoir $u_i < 0$).

Comment calculer la mise optimale:
Il y a deux approches:

- optimisation "à la marge"
- optimisation "en absolu"

Optimisation à la marge

Vous êtes l'acheteur 1 dans une enchère hollandaise. Le prix est maintenant à $p \leq v_1$ et personne n'a encore levé la main.

Si vous levez la main tout de suite, vous obtenez $u_1 = v_1 - p$.

Vous songez à attendre un peu et levez la main lorsque le prix aura atteint $p - \Delta p$.

Quel est le bénéfice de faire cela? Quel en est le coût?