On sait que personne n'a encore levé la main, donc que toutes les autres mises sont $< p$.

Quel est le bénéfice d'attendre que le prix atteigne $p - \Delta p$ avant de lever la main ?

- si personne ne lève la main avant que le prix n'atteigne $p - \Delta p$, et que vous levez la main à ce moment-là, vous aurez augmenté votre utilité de combien?

  Δp gain d'utilité

  car avant $u_i = v_i - p$

  maintenant $u_i = v_i - (p - \Delta p)$

- mais ce n'est pas un gain sûr.

  Quelle est la probabilité qu'on l'obtienne ?

  Il faut que personne d'autre ne lève la main, donc que les $N-1$ autres mises soient toutes $< p - \Delta p$

Remarque :

Pour calculer cette probabilité il faudrait connaître les mises des autres joueurs. Nous ne les connaissons pas.

Il y a moyen de continuer si on sait résoudre des équations différentielles. Nous ne ferons pas d'équations différentielles. Je vous donnerai un indice qui va vous permettre de continuer.

Fonction de mise :

la mise qu'un acheteur utilise exprimée en fonction de sa valeur.

On suppose très souvent dans ces exercices que tous les acheteurs utilisent la même fonction de mise.
Par exemple : $b_i = (0.8) v_i$

Si toutes les valeurs v_i sont différentes, alors toutes les mises seront différentes aussi. Mais la relation entre b_i et v_i est la même pour tout le monde.

De retour à notre probabilité.
On suppose que les N-1 autres acheteurs misent de la façon suivante :

$$b_i = \alpha v_i$$

constante positive

$$Pr\{b_i < p - \Delta p\}$$ = prob. qu'un acheteur ait une mise $< p - \Delta p$

$$Pr\{b_i < p - \Delta p \mid b_i < p\}$$

= prob. que $b_i < p - \Delta p$ sachant que $b_i < p$

$$= \frac{Pr\{b_i < p - \Delta p\}}{Pr\{b_i < p\}}$$

$$\left[\frac{Pr\{b_i < p-\Delta p\}}{Pr\{b_i < p\}}\right]^{N-1}$$

= prob. qu'aucun des N−1 autres ne lève la main lorsque le prix diminue de p à p−Δp sachant qu'ils n'ont pas levé la main avant.

Donc, le bénéfice d'attendre que le prix baisse de p à p−Δp est

$$\Delta p \cdot \left[\frac{Pr\{b_i < p-\Delta p\}}{Pr\{b_i < p\}}\right]^{N-1}$$

= bénéfice

Mais quels sont

$Pr\{b_i < p-\Delta p\}$ et $Pr\{b_i < p\}$?

$$Pr\{b_i < p-\Delta p\} = Pr\{\alpha v_i < p-\Delta p\}$$

$$= Pr\left\{v_i < \frac{p-\Delta p}{\alpha}\right\}$$

$$= F\left(\frac{p-\Delta p}{\alpha}\right)$$

et de la même manière :

$$\Pr\{b_i < p\} = F(p/\alpha)$$

Il ~~faut~~ faut, pour continuer, spécifier la forme de $F(\cdot)$.

Supposons que les valeurs v_i sont distribuées de manière uniforme sur l'intervalle $[0,1]$.

Ainsi $F(x) = x$

Avec cette distribution, on obtient

$$\Pr\left\{v_i < \frac{p-\Delta p}{\alpha}\right\} = \frac{p-\Delta p}{\alpha}$$

$$\Pr\left\{v_i < \frac{p}{\alpha}\right\} = \frac{p}{\alpha}$$

bénéfice =

$$\Delta p \cdot \left[\frac{\left(\frac{p-\Delta p}{\alpha}\right)}{\left(\frac{p}{\alpha}\right)}\right]^{N-1} = \Delta p \left(\frac{p-\Delta p}{p}\right)^{N-1}$$

Quel est le coût d'attendre?

Si on attend, on risque de perdre $V_1 - p$ si quelqu'un d'autre lève la main.

Et la prob. que cela arrive est:

$$1 - \text{prob. déja calculée}$$

$$= 1 - \left[\frac{\Pr\{b_i < p - \Delta p\}}{\Pr\{b_i < p\}}\right]^{N-1}$$

Avec les suppositions ~~faites~~, cela devient

$$1 - \left(\frac{p - \Delta p}{p}\right)^{N-1}$$

Donc,

$$\text{coût} = (V_1 - p)\left[1 - \left(\frac{p - \Delta p}{p}\right)^{N-1}\right]$$

Quelle est l'étape suivante?

Si bénéfice > coût, alors on attend avant de lever la main, mais si on parvient à $p-\Delta p$, on devrait recommencer l'exercice.

Et ce, jusqu'à ce que

bénéfice = coût

Lorsque ceci est satisfait, il est temps de lever la main.

bénéfice = coût

$$\Delta p\left(\frac{p-\Delta p}{p}\right)^{N-1} = (V_1 - p)\left[1 - \left(\frac{p-\Delta p}{p}\right)^{N-1}\right]$$

$$\Delta p\,(p-\Delta p)^{N-1} = (V_1-p)\left[p^{N-1} - (p-\Delta p)^{N-1}\right]$$

$$(p-\Delta p)^{N-1} = (V_1-p)\left[\frac{p^{N-1}-(p-\Delta p)^{N-1}}{\Delta p}\right]$$

$$\lim_{\Delta p\to 0}(p-\Delta p)^{N-1} = (V_1-p)\cdot\lim_{\Delta p\to 0}\left[\frac{p^{N-1}-(p-\Delta p)^{N-1}}{\Delta p}\right]$$

$$\lim_{\Delta p \to 0} \frac{p^{N-1} - (p-\Delta p)^{N-1}}{\Delta p}$$

$$= \frac{\lim_{\Delta p \to 0} -(N-1)(p-\Delta p)^{N-2} \cdot (-1)}{\lim_{\Delta p \to 0} 1}$$

Par règle de l'Hospital

$$= (N-1)\, p^{N-2}$$

Donc bénéfice = coût devient enfin

$$p^{N-1} = (V_1 - p)(N-1)p^{N-2}$$

$$\hookrightarrow p = (V_1 - p)(N-1)$$

$$\hookrightarrow \cancel{p} = (N-1)V_1 - Np + \cancel{p}$$

$$\hookrightarrow \boxed{p = \left(\frac{N-1}{N}\right)V_1}$$

Solution (mise optimale pour acheteur 1)

$$\rightarrow b_1 = \left(\frac{N-1}{N}\right)V_1$$

Et que faire de l'optimalité pour les N-1 autres (qui jouent, on a supposé, $b_i = \alpha v_i$) ?

Si on suppose $\alpha = \frac{N-1}{N}$,
alors l'optimalité est vérifiée pour tous les acheteurs.

Pourquoi ?
Parce qu'on aura démontré que
$b_1 = \left(\frac{N-1}{N}\right) v_1$ est optimal
lorsque les N-1 autres jouent

$$b_i = \left(\frac{N-1}{N}\right) v_i$$

Ce sera donc vrai pour les joueurs 2, ..., N aussi.

→ Equilibre de Nash symétrique.