Enchères (suite).

mise optimale:
enchère hollandaise

- approche d'optimisation "à la marge" (résumé)

- Supposons qu'un prix $p \leq v_i$ a été atteint (sans que personne ne lève la main).
- L'acheteur i se demande :

lever la main maintenant ou attendre ?

lever la main maintenant
$\longrightarrow u_i = v_i - p$

attendre $\rightarrow$ 2 possibilités :

1. personne ne lève la main pendant que le prix diminue de p à $p - \Delta p$.

$\longrightarrow$ gain de Δp par rapport à $u_i = v_i - p$

2. quelqu'un lève la main
$\rightarrow u_i = 0$
perte de $v_i - p$

Bénéfice marginal

$= \Delta p \cdot \text{Prob}\{$ personne ne lève la main entre p et Δp | personne n'a levé la main avant $p\}$

"conditionnel à ce que"

("sachant que")

appelons cette probabilité X.

Bénéfice marg. $= \Delta p \cdot X$

Coût marg. $= (v_i - p)(1 - X)$

condition d'optimalité :

$$\Delta p X = (v_i - p)(1 - X)$$

Le prix p qui satisfait ceci est la mise optimale.

Dans un équilibre symétrique, la même fonction de mise $b(v)$ est utilisée par tous les acheteurs.

Pour n'importe quel acheteur i, la mise $b(v_i)$ est optimale lorsque les $N-1$ autres acheteurs utilisent aussi cette fonction de mise.

Optimisation "en absolu"

Pensons à l'enchère cachetée au 1^{er} prix, qui est équivalente à l'enchère hollandaise.

$$Eu_i = (v_i - p) \cdot Pr\{gagner\}$$

espérance

$$+ 0 \cdot Pr\{perdre\}$$

$$= (v_i - p) \cdot Pr\{gagner\}$$

Le problème :

$$\max_{b_i} Eu_i = (v_i - b_i) \cdot Pr\{b_i \text{ est la plus haute mise}\}$$

Quelle est cette probabilité ?

Supposons $i = 1$.

$$Pr\{b_1 \text{ est la plus haute mise}\}$$

$$= Pr\{b_1 > b_2\} \times Pr\{b_1 > b_3\} \times \ldots \times Pr\{b_1 > b_N\}$$

[On suppose que les valeurs des acheteurs sont statistiquement indépendantes, i.e. non-corrélées.]

Nous aurons ici $N-1$ fois la même probabilité.

$$= \left[Pr\{b_1 > b_j\} \right]^{N-1} \quad \text{où } j \in \{2, \ldots, N\}$$

Mais quel est

$$\Pr\{b_1 > b_j\} \ ?$$

On doit supposer :

- la forme de $F(\cdot)$
- la forme de $b(v)$, la fonc. de mise utilisée par les autres.

Pour cet exercice, supposons que les valeurs v_j sont distribuées de manière uniforme sur $[0,1]$.

$$\rightarrow F(x) = x$$

Et on suppose aussi que les N-1 autres acheteurs utilisent comme fonction de mise

$$b = \alpha v$$

coefficient inconnu

$$\Pr\{b_1 > b_j\} = \Pr\{b_1 > \alpha v_j\}$$

$$= \Pr\{b_1/\alpha > v_j\}$$

$$= \Pr\{v_j < b_1/\alpha\}$$

$$= F(b_1/\alpha)$$

$$= b_1/\alpha$$ pour cette distribution

donc

$$\Pr\{b_1 \text{ est la mise gagnante}\}$$

$$= \left[\Pr\{b_1 > b_j\}\right]^{N-1}$$

$$= \left(b_1/\alpha\right)^{N-1}$$

Alors on a :

$$Eu_1 = (v_1 - b_1)\cdot\left(\frac{b_1}{\alpha}\right)^{N-1}$$

CPO. $$\frac{\partial Eu_1}{\partial b_1} = -\left(b_1/\alpha\right)^{N-1} + (N-1)\left(\frac{1}{\alpha}\right)\left(b_1/\alpha\right)^{N-2}(v_1 - b_1) = 0$$

$$\rightarrow \quad b_1^{N-1} = (v_1 - b_1)(N-1)\, b_1^{N-2}$$

$$\rightarrow \quad b_1 = (v_1 - b_1)(N-1)$$

$$= (N-1)v_1 - Nb_1 + b_1$$

$$\rightarrow \quad \boxed{b_1 = \left(\frac{N-1}{N}\right) v_1}$$

A l'équilibre, tous les joueurs (incluant l'acheteur 1) utilisent la même fonction de mise. Donc $\alpha = \frac{N-1}{N}$.

Appels d'offre.

Un gouvernement veut faire construire un édifice. Il lance un appel d'offre ("tender"), qui est une invitation à soumettre des offres pour construire l'édifice à un certain prix.

- N joueurs (compagnies de construction)
- chaque joueur i a un coût c_i qui est son information privée
- les coûts des N firmes suivent une distribution $F(\cdot)$ connue de tous.
- Chaque joueur soumet une mise b qui est le prix qu'il demande au gouvernement pour construire l'édifice
- le contrat est octroyé au joueur qui a soumis la mise la plus <u>basse</u>.
- Le joueur qui obtient le contrat aura comme surplus

$$u_i = b_i - c_i$$

Les autres n'ont rien.