Théorie des jeux évolutionnaires

motivation :

- expliquer des comportements rationnels (même hyper-rationnels, i.e. nécessitant des calculs) chez des individus qui une rationalité limitée.
- expliquer l'origine de nos institutions

origines :

- Maynard Smith et Price (1973), "The Logic of Animal Conflict", Nature.

---

structure :

- on étudie un jeu simultané, symétrique.
- chaque joueur joue instinctivement <u>une</u> stratégie.

  Il ne la choisit pas : il est né avec un instinct qui lui dit de jouer cette stratégie.

Qu'est-ce que l'optimalité ici ?

Le joueur n'agit pas nécessairement de façon optimale. Il ne fait pas de choix.

Mais la stratégie qu'il joue va lui rapporter plus ou moins de succès selon que cette stratégie ou non.

Une stratégie qui a plus de succès va permettre à l'individu de se reproduire ou de survivre. Une stratégie qui a moins de succès va mener à de faibles chances de survie ou reproduction.

Equilibre : On considère

- une situation où tous les individus jouent la même stratégie
- la possibilité d'une mutation (une petite fraction de la population qui se met à jouer une stratégie différente)
- si la stratégie que tout le monde jouait avant la mutation résiste à toute mutation possible, on dit qu'elle est <u>évolutionnairement stable</u>.

Notation :

- soit $\mathcal{S} = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ un ensemble de stratégies pures.
- $s_i \in \mathcal{S}$ est une stratégie pure
- $\sigma_i = \underbrace{(p_1, p_2, \ldots, p_n)}_{\text{vecteur de probabilités sur } \mathcal{S}}$ est une strat. mixte

- $\pi_{s_i s_j}$ = payoff à un joueur qui joue s_i contre un joueur qui joue s_j.

et

$\pi_{\sigma_i \sigma_j}$ = espérance de payoff d'un joueur qui joue σ_i contre un joueur qui joue σ_j.

- forme normale :

		②	
		s_1	s_2
①	s_1	$\pi_{s_1 s_1}, \pi_{s_1 s_1}$	$\pi_{s_1 s_2}, \pi_{s_2 s_1}$
	s_2	$\pi_{s_2 s_1}, \pi_{s_1 s_2}$	$\pi_{s_2 s_2}, \pi_{s_2 s_2}$

		② s_1	② s_2	
①	s_1	$\pi_{s_1s_1}, \pi_{s_1s_1}$	$\pi_{s_1s_2}, \pi_{s_2s_1}$	p
①	s_2	$\pi_{s_2s_1}, \pi_{s_1s_2}$	$\pi_{s_2s_2}, \pi_{s_2s_2}$	$1-p$
		q	$1-q$	

soit deux stratégie mixtes

$$\sigma_p = (p, 1-p)$$

$$\sigma_q = (q, 1-q)$$

alors

$$\pi_{\sigma_p\sigma_q} = pq\,\pi_{s_1s_1} + p(1-q)\,\pi_{s_1s_2} + (1-p)q\,\pi_{s_2s_1} + (1-p)(1-q)\,\pi_{s_2s_2}$$

Contexte :

① et ② sont deux individus de la même espèce. A l'équilibre, on imagine que tous les individus de la même espèce joue la même stratégie : cette stratégie définit l'espèce en quelque sorte.

- Un individu qui joue une stratégie différente (de ce qui est joué par la majorité) est un mutant.

Quelle interprétation donner à une stratégie mixte ?

2 possibilités :

- interprétation monomorphique : chaque individu joue cette stratégie mixte.
- interprétation polymorphique : chaque individu joue une stratégie pure, et les probabilités p_1, p_2, etc. mesurent les proportions jouant s_1, s_2, etc.

Mutations :

- Supposons qu'initialement tous les individus dans une population jouent la stratégie s^*.
- Une fraction $\varepsilon > 0$ de la population qui se met soudainement à jouer s^m, où $s^m \neq s^*$. C'est une mutation.
- La question : cette mutation va-t-elle
  (i) disparaître
  (ii) envahir la population
- La population est maintenant composée de :
  fraction ε de mutants
  fraction $1-\varepsilon$ de "normaux" (non-mutants)
- Un individu "représentatif" de la population joue

$$\bar{\sigma} = (1-\varepsilon)s^* + \varepsilon s^m$$

Qui performe mieux contre $\bar{\sigma}$, les mutants ou les non-mutants ?

$$\Pi_{s^*\bar{\sigma}} = (1-\varepsilon)\Pi_{s^*s^*} + \varepsilon\,\Pi_{s^*s^m}$$

$$\Pi_{s^m\bar{\sigma}} = (1-\varepsilon)\Pi_{s^m s^*} + \varepsilon\,\Pi_{s^m s^m}$$

La mutation va envahir la pop. si

$$\Pi_{s^m\bar{\sigma}} \geq \Pi_{s^*\bar{\sigma}}.$$

Elle disparaîtra si

$$\Pi_{s^m\bar{\sigma}} < \Pi_{s^*\bar{\sigma}}$$

- Une <u>stratégie évolutionnairement stable</u> est une stratégie qui résiste à toute mutation.

  i.e. telle que

$$\Pi_{s^*\bar{\sigma}} > \Pi_{s^m\bar{\sigma}}$$

  pour tout $s^m \neq s^*$.

Définition équivalente :

Une stratégie s^* est évol. stable si pour tout $s^m \neq s^*$

1. $\Pi_{s^* s^*} > \Pi_{s^m s^*}$

ou 2. $\Pi_{s^* s^*} = \Pi_{s^m s^*}$ et $\Pi_{s^* s^m} > \Pi_{s^m s^m}$

Définition avec strat. mixtes :

σ^* est évol. stable si pour tout $\sigma^m \neq \sigma^*$

1. $\Pi_{\sigma^* \sigma^*} > \Pi_{\sigma^m \sigma^*}$

ou 2. $\Pi_{\sigma^* \sigma^*} = \Pi_{\sigma^m \sigma^*}$ et $\Pi_{\sigma^* \sigma^m} > \Pi_{\sigma^m \sigma^m}$

Exemple :

			2	
		A	B	C
1	A	1,1	0,0	0,0
	B	0,0	3,3	2,3
	C	0,0	3,2	3,3

Parmi A, B et C, y a-t-il des stratégies évol. stables (SES) ?
[Ne considérer que les mutations jouant des strat. pures.]

A : est-ce qu'une pop. jouant A peut être envahie par une mutation jouant B ?

A résiste à une mut. jouant B si :

$\pi_{AA} > \pi_{BA}$

ou $[\pi_{AA} = \pi_{BA}$ et $\pi_{AB} > \pi_{BB}]$

ici $\pi_{AA} = 1$ et $\pi_{BA} = 0$

donc $\pi_{AA} > \pi_{BA}$.

la pop. résiste.

- et contre une mut. jouant C ?

$\pi_{AA} > \pi_{CA}$

donc population résiste.

$\therefore$ A est une SES.

- ensuite on peut démontrer que B résiste à A.

mais B ne résiste pas à C :

$$\pi_{BB} = 3 \quad \text{et} \quad \pi_{CB} = 3$$

$$\pi_{BC} = 2 \quad \text{et} \quad \pi_{CC} = 3$$

→ B n'est pas une SES.

- On peut démontrer que C est une SES.

			2	
		A	B	C
	A	1,1	3,2	0,0
1	B	2,3	3,3	2,3
	C	0,0	3,2	4,4

Est-ce qu'une pop. jouant B, i.e. $\sigma^* = (0,1,0)$, peut être envahie par une mutation jouant $\sigma^m = (\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2})$?

$$\Pi_{\sigma^*\sigma^*} = 3$$

$$\Pi_{\sigma^m\sigma^*} = \left(\tfrac{1}{2}\right)\Pi_{AB} + \left(\tfrac{1}{2}\right)\Pi_{CB} = 3$$

$$\Pi_{\sigma^*\sigma^m} = \left(\tfrac{1}{2}\right)\Pi_{BA} + \left(\tfrac{1}{2}\right)\Pi_{BC} = 2$$

$$\Pi_{\sigma^m\sigma^m} = \left(\tfrac{1}{4}\right)1 + \left(\tfrac{1}{4}\right)(0) + \left(\tfrac{1}{4}\right)0 + \left(\tfrac{1}{4}\right)4$$

$$= 5/4$$

donc $\Pi_{\sigma^*\sigma^*} = \Pi_{\sigma^m\sigma^*}$

et $\Pi_{\sigma^*\sigma^m} > \Pi_{\sigma^m\sigma^m}$

$\therefore$ la pop. résiste.